首 都 经 济 贸 易 大 学
统计学院首届“厚朴”杯大学生数学竞赛试题（B 类）

考试年级：大二及以上 **考试形式：闭 卷**

试卷总分：100 分 **考试时间：120 分钟**

一、(10 分) 求数列极限

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

解：（用极限的迫敛性计算）

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\le\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\le\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\frac{1}{2},$$

所以原极限=$\dfrac{1}{2}$。

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\mathrm{n}+1}+\dfrac{1}{\mathrm{n}+2}+\cdots+\dfrac{1}{\mathrm{n}+\mathrm{n}}\right)$.

解：（用定积分定义计算）

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{n}+1}+\frac{1}{\mathrm{n}+2}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{n}+\mathrm{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\ln|1+x|\Big|_0^1=\ln 2$$

二、(10 分) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0,\quad f''(0)=4$，求函数极限

$$\lim_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}.$$

解： $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot x=0,$

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0,$$

从而

$$\lim_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}f''(0)}=\mathrm{e}^2$$

解法 2）

$$\lim_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{x}{f(x)}}\right\}^{\frac{f(x)}{x^2}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}f''(0)}=\mathrm{e}^2$$

注：由条件“$f(x)$有二阶连续导数”，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}$ 也可以使用两次洛必达法则进行求解，

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(0)}{2}=2\ ,$$

若没有“$f(x)$二阶导数连续”的条件，只能使用一次洛必达法则，再使用二阶导数的定义来求解。

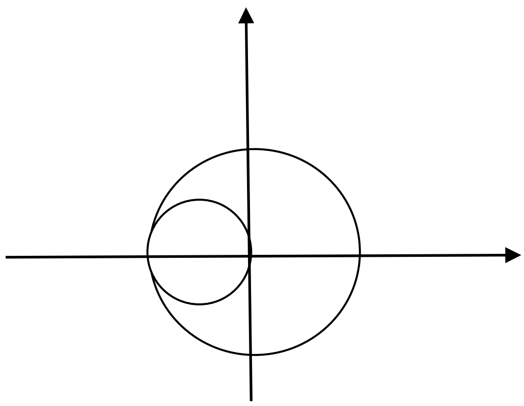
三、(10 分) 计算二重积分 $\iint\limits_D\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 为由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$所围成的平面区域.

解：记

$D_1=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le4\}$,

$D_2=\{(x,y)\big|(x+1)^2+y^2\le1\}$，

利用二重积分的对称性原理，得



$$\iint_D\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+0$$

$$=\iint_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\,\mathrm{d}r-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2\cos\theta}r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{16}{3}\pi-\frac{32}{9}$$

四、(10 分) 甜品师制作了一个独特的巧克力塔，将曲线 $y=\sqrt{x},\ x\in[1,4]$ 绕 x 轴旋转一周，便形成了巧克力塔的形状．单位为分米，假设巧克力的密度均匀，每立方分米巧克力质量为 2 千克．

（1）计算该巧克力塔的表面积；

（2）计算该巧克力塔的体积，并求出其质量．

解：（1）

$$S=\int_1^4 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x+\pi\cdot 1^2+\pi\cdot 2^2$$

$$=\int_1^4 2\pi\sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,\mathrm{d}x+5\pi$$

$$=2\pi\int_1^4\sqrt{x+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x+5\pi=2\pi\cdot\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^4+5\pi=\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})+5\pi$$

（2）该巧克力塔的体积为

$$V=\int_1^4\pi(\sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x=\int_1^4\pi x\,\mathrm{d}x=\pi\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^4=\frac{15\pi}{2}(\text{立方分米}),$$

质量为 $m=2\times\dfrac{15\pi}{2}=15\pi$.

五、(10 分) 设方程 $F(cx-az,cy-bz)=0$ 确定了函数 $z=z(x,y)$，其中 F 具有连续偏导数，求 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：设 $G(x,y,z)=F(cx-az,cy-bz)$ ，则

$$G_x'=cF_1',\quad G_y'=cF_2',\quad G_z'=-aF_1'-bF_2',$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G'_x}{G'_z}=\frac{cF'_1}{aF'_1+bF'_2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{G'_y}{G'_z}=\frac{cF'_2}{aF'_1+bF'_2},$$

从而$a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=c.$

六、（10 分）设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$， $g(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$.

（1）求 $g'(x)$；

（2）判断 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解： $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot x=0,$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1,$$

当 $x\neq 0$ 时，

$$g(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t\overset{u=xt}{=\!=}\int_0^x f(u)\frac{1}{x}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$$

从而当 $x\neq 0$ 时， $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u+\dfrac{1}{x}f(x)$,

又 $g(0)=\int_0^1 f(0)\,\mathrm{d}t=f(0)$,

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2},$$

所以 $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}\quad, & x=0\end{cases}$。

（2）

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u\right]$$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x^2}=1-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=g'(0)$$

所以 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

七、(10 分) 设银行存款的年利率为 $r=0.05$，并按照年复利计算（即每年计算一次利率，并将上一年的本金和利息合并作为下一年的本金，逐年滚动计息）. 某基金会希望通过存款 A 万元，实现第一年提取 19 万元，第二年提取 28 万元，…，第 n 年提取（10+9n）万元，并能按此规律一直提取下去，问 A 至少应为多少万元？

解： **设** A_n 为第 n 年提取 $(10+9n)$ 万元的现值，即

$$A_n(1+r)^n=10+9n,$$

故

$$A_n=\frac{10+9n}{(1+r)^n}.$$

由题意可知，

$$A\geq\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10+9n}{(1+r)^n}=10\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^n}+9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+r)^n}.$$

其中

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^n}=\frac{\frac{1}{1+r}}{1-\frac{1}{1+r}}=\frac{1}{r}=20.$$

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$，则

$$S(x)=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2},,$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+r)^n}=S\left(\frac{1}{1+r}\right)=S\left(\frac{1}{1.05}\right)=420.$$

从而

$$A\geq 10\times 20+9\times 420=3980 \text{ 万元},$$

即 A 至少为 3980 万元.

八、(10 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & -3\\ a & 3 & -4\\ 2b & 5 & -7\end{pmatrix}$，其中 a,b 是实数. 若线性方程组 $A^2X=0$ 与 $AX=0$ 不同解, 计算 $a-2b$ 的值.

解： 若 A 可逆，则 $A^2X=0$ 与 $AX=0$ 均有唯一解 0，从而同解，因此 A 不可逆，从而 $|A|=0$。

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & 2 & -3\\ a & 3 & -4\\ 2b & 5 & -7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 2 & -1\\ a & 3 & -1\\ 2b & 5 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 0 & -1\\ a & 1 & -1\\ 2b & 1 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 0 & -1\\ a-2b & 0 & 1\\ 2b & 1 & -2\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}4 & -1\\ a-2b & 1\end{vmatrix}=-4-(a-2b)=0$$

所以 $a-2b=-4$.

九、(10 分) 设 $A,E-A$ 是可逆 n 阶方阵，其中 E 为单位矩阵，若矩阵 B 满足

$$(E-(E-A)^{-1})B=A,$$

证明： $A-B=E$.

证： $(E-(E-A)^{-1})B=A$，从而 $B-(E-A)^{-1}B=A$，即有

$$B-A=(E-A)^{-1}B,$$

$$(E-A)\left(B-A\right)=B,$$

$$B-A-AB+A^2=B,$$

$$-A-AB+A^2=0,$$

$$A(-E-B+A)=0,$$

$$-E-B+A=A^{-1}0=0,$$

故 $A-B=E$。

十、(10 分) 给定非零实数 a 及 n 阶反对称实矩阵 A (即 $A^T=-A$)，定义矩阵有序对集合 W 为

$W=\left\{(X,Y)\middle|X\in\mathbb{R}^{n\times n},Y\in\mathbb{R}^{n\times n},XY=aI+A\right\}$，（$I$ 为单位矩阵），

（1）任取 $(X,Y)\in W$，求 $XY+(XY)^T$；

（2）证明：任取 W 中两元 (X,Y) 和 (M,N)，必有 $XN+Y^TM^T\neq 0$.

（1） **解：**

$$XY+(XY)^T=aI+A+(aI+A)^T=aI+A+aI+A^T=aI+A+aI-A=2aI.$$

（2）**证：反证法。**任取 W 中两元 (X,Y) 和 (M,N)，假设 $XN+Y^TM^T=0,$

从而有 $\left(XN+Y^TM^T\right)^T=0,\quad$ 即$N^TX^T+MY=0.$

又 $(X,Y)\in W,(M,N)\in W,$ 从而

$$XY+Y^TX^T=2aI,$$
$$MN+N^TM^T=2aI,$$

由以上四个等式可得

$$\begin{pmatrix}X & Y^T\\ M & N^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y & N\\ X^T & M^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2aI & 0\\ 0 & 2aI\end{pmatrix}=2a\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{2a}\begin{pmatrix}X & Y^T\\ M & N^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y & N\\ X^T & M^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix},$$

从而

$$\frac{1}{2a}\begin{pmatrix}Y & N\\ X^T & M^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X & Y^T\\ M & N^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix},$$

从而

$$YY^T+NN^T=0,$$

可得 $Y=0,N=0,$ 从而 $XY=0$，与 $XY=aI+A\neq 0$ 矛盾，假设不成立。

所以任取 W 中两元 (X,Y) 和 (M,N)，必有 $XN+Y^TM^T\neq 0$.