

首都经济贸易大学
统计学院首届“厚朴”杯大学生数学竞赛试题（A类）

考试年级：大一

考试形式：闭卷

试卷总分：100 分

考试时间：120 分钟

一、(10 分) 求数列极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right).$$

解：（用极限的迫敛性计算）

$$\begin{aligned} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} &\leq \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)} = \frac{1}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

所以原极限 = $\frac{1}{2}$ 。

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right).$$

解：（用定积分定义计算）

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln |1+x| \Big|_0^1 = \ln 2 \end{aligned}$$

二、(10 分) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ ， $f''(0) = 4$ ，求函数极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}}.$$

解： $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot x = 0$,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

从而

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right]}{x}} \\&= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x}}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x}} = e^{\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}} = e^{\frac{1}{2} f''(0)} = e^2\end{aligned}$$

解法 2)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{x}{f(x)}} \right\}^{\frac{f(x)}{x^2}} \\&= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x}} = e^{\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}} = e^{\frac{1}{2} f''(0)} = e^2\end{aligned}$$

注：由条件“ $f(x)$ 有二阶连续导数”， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ 也可以使用两次洛必达法则进行求解，

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2} = 2,$$

若没有“ $f(x)$ 二阶导数连续”的条件，只能使用一次洛必达法则，再使用二阶导数的定义来求解。

三、(10 分) (1) 计算积分 $\int_0^{2025} (x - [x]) dx$ ，其中 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数。

解： $x - [x]$ 为以 1 为周期的周期函数，由周期函数的定积分的性质得，

$$\int_0^{2025} (x - [x]) dx = 2025 \int_0^1 (x - [x]) dx = 2025 \int_0^1 (x - 0) dx = \frac{2025}{2}。$$

解法 2)

$$\begin{aligned}\int_0^{2025} (x - [x]) dx &= \int_0^{2025} x dx - \int_0^{2025} [x] dx = \frac{2025^2}{2} - \sum_{k=0}^{2024} \int_k^{k+1} [x] dx \\&= \frac{2025^2}{2} - \sum_{k=0}^{2024} \int_k^{k+1} k dx = \frac{2025^2}{2} - \sum_{k=0}^{2024} k = \frac{2025^2}{2} - \frac{2024 \times 2025}{2} = \frac{2025}{2}\end{aligned}$$

(2) 已知 $f'(x) = \arctan(x-1)^2$, 且 $f(0) = 0$, 求 $\int_0^1 f(x) dx$.

解:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) d(x-1) = (x-1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (x-1)f'(x) dx \\&= 0 - \int_0^1 (x-1)\arctan(x-1)^2 dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \arctan(x-1)^2 d[(x-1)^2] \\&\stackrel{u=(x-1)^2}{=} -\frac{1}{2} \int_1^0 \arctan u du = \frac{1}{2} \int_0^1 \arctan u du \\&= \frac{1}{2} u \arctan u \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 u \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} d(1+u^2) \\&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln(1+u^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2\end{aligned}$$

四、(10 分) 甜品师制作了一个独特的巧克力塔, 将曲线 $y = \sqrt{x}$, $x \in [1, 4]$ 绕 x 轴旋转一周, 便形成了巧克力塔的形状. 单位为分米, 假设巧克力的密度均匀, 每立方分米巧克力质量为 2 千克.

(1) 计算该巧克力塔的表面积;

(2) 计算该巧克力塔的体积, 并求出其质量.

解: (1)

$$\begin{aligned}S &= \int_1^4 2\pi f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx + \pi \cdot 1^2 + \pi \cdot 2^2 \\&= \int_1^4 2\pi \sqrt{x} \sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx + 5\pi \\&= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x+\frac{1}{4}} dx + 5\pi = 2\pi \cdot \frac{2}{3} \left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 + 5\pi = \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}) + 5\pi\end{aligned}$$

(2) 该巧克力塔的体积为

$$V = \int_1^4 \pi (\sqrt{x})^2 dx = \int_1^4 \pi x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_1^4 = \frac{15\pi}{2} \text{ (立方分米)},$$

$$\text{质量为 } m = 2 \times \frac{15\pi}{2} = 15\pi.$$

五、(10 分) 若 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 它在 $x=0$ 的某邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + \alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 是 $x \rightarrow 0$ 时比 x 高阶的无穷小, 且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 求曲线 $y = f(x)$

在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.

解: 等式两边令 $x \rightarrow 0$, 得 $f(1) - 3f(1) = 0$, 从而 $f(1) = 0$.

$\sin x \neq 0$ 时, 由原等式可得,

$$\frac{f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x)}{\sin x} = \frac{8x + \alpha(x)}{\sin x},$$

两边令 $x \rightarrow 0$, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x + \alpha(x)}{\sin x},$$

又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x)}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(1+\sin x) - f(1)}{\sin x} - 3 \frac{f(1-\sin x) - f(1)}{-\sin x} \cdot (-1) \right] \\ &= f'(1) + 3f'(1) = 4f'(1) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x + \alpha(x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x + \alpha(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[8 + \frac{\alpha(x)}{x} \right] = 8 + 0 = 8,$$

所以 $4f'(1) = 8$, 从而 $f'(1) = 2$.

由 $f(x)$ 周期为 5, 得 $f'(x)$ 周期也为 5, 从而 $f(6) = f(1) = 0$, $f'(6) = f'(1) = 2$,

所求切线方程为 $y = 2(x - 6)$.

六、(10 分) 设 $f(x)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, $g(x) = \int_0^1 f(xt) dt$.

(1) 求 $g'(x)$;

(2) 判断 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

解: $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot x = 0$,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

当 $x \neq 0$ 时,

$$g(x) = \int_0^1 f(xt) dt \stackrel{u=xt}{=} \int_0^x f(u) \frac{1}{x} du = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du$$

从而当 $x \neq 0$ 时, $g'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(u) \, du + \frac{1}{x} f(x)$,

$$\text{又 } g(0) = \int_0^1 f(0) \, dt = f(0),$$

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) \, du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } g'(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \int_0^x f(u) \, du, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}.$$

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \int_0^x f(u) \, du \right] \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) \, du}{x^2} = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = g'(0) \end{aligned}$$

所以 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。

七、(10 分) 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上以 T 为周期的周期函数, 且连续, 证明:

(1) 函数 $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt - \frac{x}{T} \int_0^T f(t) \, dt$ 是以 T 为周期的周期函数。

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, dt$ 。

证: (1)

$$\begin{aligned} F(x+T) &= \int_0^{x+T} f(t) \, dt - \frac{x+T}{T} \int_0^T f(t) \, dt \\ &= \int_0^x f(t) \, dt + \int_x^{x+T} f(t) \, dt - \frac{x}{T} \int_0^T f(t) \, dt - \int_0^T f(t) \, dt \\ &= \int_0^x f(t) \, dt + \int_0^T f(t) \, dt - \frac{x}{T} \int_0^T f(t) \, dt - \int_0^T f(t) \, dt \\ &= \int_0^x f(t) \, dt - \frac{x}{T} \int_0^T f(t) \, dt = F(x) \end{aligned}$$

所以, $F(x)$ 是以 T 为周期的周期函数。

(2) 方法 1) 由 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上以 T 为周期的连续函数得, 函数 $F(x)$ 为以 T 为周期

的连续函数. 从而 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界, 故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

方法 2) $\forall x > 0, \exists n \in \mathbb{N}^+, \text{使得 } nT \leq x < (n+1)T,$

记 $x = nT + \lambda$ ($0 \leq \lambda < T$), 则

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^{nT} f(t) dt + \int_{nT}^{nT+\lambda} f(t) dt = n \int_0^T f(t) dt + \int_0^\lambda f(t) dt,$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n}{nT + \lambda} \int_0^T f(t) dt + \frac{1}{nT + \lambda} \int_0^\lambda f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt + 0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \end{aligned}$$

八、(10 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ a & 3 & -4 \\ 2b & 5 & -7 \end{pmatrix}$, 其中 a, b 是实数. 若线性方程组 $A^2 X = 0$ 与

$AX = 0$ 不同解, 计算 $a - 2b$ 的值.

解: 若 A 可逆, 则 $A^2 X = 0$ 与 $AX = 0$ 均有唯一解 0 , 从而同解, 因此 A 不可逆,

从而 $|A| = 0$.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ a & 3 & -4 \\ 2b & 5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ a & 3 & -1 \\ 2b & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ a & 1 & -1 \\ 2b & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ a-2b & 0 & 1 \\ 2b & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ a-2b & 1 \end{vmatrix} = -4 - (a-2b) = 0 \end{aligned}$$

所以 $a - 2b = -4$.

九、(10 分) 设 $A, E - A$ 是可逆 n 阶方阵, 其中 E 为单位矩阵, 若矩阵 B 满足

$$(E - (E - A)^{-1})B = A,$$

证明: $A - B = E$.

证: $(E - (E - A)^{-1})B = A$, 从而 $B - (E - A)^{-1}B = A$, 即有

$$B - A = (E - A)^{-1}B ,$$

$$(E - A)(B - A) = B ,$$

$$B - A - AB + A^2 = B ,$$

$$-A - AB + A^2 = 0 ,$$

$$A(-E - B + A) = 0 ,$$

$$-E - B + A = A^{-1}0 = 0 ,$$

故 $A - B = E$.

十、(10 分) 给定非零实数 a 及 n 阶反对称实矩阵 A (即 $A^T = -A$) , 定义矩阵有序对集合 W 为

$$W = \{(X, Y) \mid X \in \mathbb{R}^{n \times n}, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}, XY = aI + A\} , \quad (I \text{ 为单位矩阵}) ,$$

(1) 任取 $(X, Y) \in W$, 求 $XY + (XY)^T$;

(2) 证明: 任取 W 中两元 (X, Y) 和 (M, N) , 必有 $XN + Y^T M^T \neq 0$.

(1) 解:

$$XY + (XY)^T = aI + A + (aI + A)^T = aI + A + aI + A^T = aI + A + aI - A = 2aI .$$

(2) 证: 反证法。任取 W 中两元 (X, Y) 和 (M, N) , 假设 $XN + Y^T M^T = 0$,

从而有 $(XN + Y^T M^T)^T = 0$, 即 $N^T X^T + MY = 0$.

又 $(X, Y) \in W, (M, N) \in W$, 从而

$$XY + Y^T X^T = 2aI ,$$

$$MN + N^T M^T = 2aI ,$$

由以上四个等式可得

$$\begin{pmatrix} X & Y^T \\ M & N^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & N \\ X^T & M^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2aI & 0 \\ 0 & 2aI \end{pmatrix} = 2a \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} ,$$

$$\frac{1}{2a} \begin{pmatrix} X & Y^T \\ M & N^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & N \\ X^T & M^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

从而

$$\frac{1}{2a} \begin{pmatrix} Y & N \\ X^T & M^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y^T \\ M & N^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

从而

$$YY^T + NN^T = 0,$$

可得 $Y=0, N=0$, 从而 $XY=0$, 与 $XY=aI+A \neq 0$ 矛盾, 假设不成立。

所以任取 W 中两元 (X,Y) 和 (M,N) , 必有 $XN+Y^T M^T \neq 0$.